Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (11-3-2017)

ΘΕΜΑ 1ο

Γ. 1. ΛΑΘΟΣ   4. ΛΑΘΟΣ
2. ΣΩΣΤΟ   5. ΛΑΘΟΣ
3. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1. Έστω $g(x)=x-1-x\ln x,\ x>0$

$$g'(x)=1-\ln x - x\cdot\frac{1}{x}=-\ln x$$

x	0		1	
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

Για $x\le 1$ (και $x>0$) η $g \nearrow$ οπότε $g(x)\le g(1) \Leftrightarrow g(x)\le 0$
Για $x\ge 1$ η $g \searrow$ οπότε $g(x)\le g(1) \Leftrightarrow g(x)\le 0$ $\Big\}\Rightarrow g(x)\le 0$

2. Για $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ η $g(x)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=1=g(1)$$

Οπότε η g συνεχής για $x=1$. $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η g συνεχής στο $(0,+\infty)$

(***): Για το f(A) στο τέλος.

3. • $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x-1}=+\infty$ οπότε η $\boxed{x=0}$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2-x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2-x}=0=\lambda$

-2-

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0=\beta$

Άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

• $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x}{x-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{\ln x-x+1}{x-1}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=$

$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{-\cancel{(x-1)}}{2x\cancel{(x-1)}}=-\frac{1}{2}$

οπότε $\boxed{f'(1)=-\frac{1}{2}}$

$\varepsilon\varphi: y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

$\Leftrightarrow\boxed{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

4. Αρκεί $a^{\beta-1}>\beta^{a-1}\Leftrightarrow(\beta-1)\ln a>(a-1)\ln\beta$

$\overset{a>1}{\underset{\beta>1}{\Longleftrightarrow}}\frac{\ln a}{a-1}>\frac{\ln\beta}{\beta-1}\Longleftrightarrow f(a)>f(\beta)$

$\overset{\text{Για } x\geq1}{\underset{\eta\ f\searrow}{\Longleftrightarrow}}$ $a<\beta$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ 3ο

1. $f(x) = 2e^{x-a} - x^2, \ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{x-a} - 2x \quad (*)$

$f''(x) = 2e^{x-a} - 2$

Έστω $f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-a} > 2 \Leftrightarrow e^{x-a} > 1 \Leftrightarrow e^{x-a} > e^0 \Leftrightarrow x - a > 0 \Leftrightarrow x > a$

x		a	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής $A(a, f(a))$

$\Rightarrow A(a, 2 - a^2)$

$y = -x^2 + 2 \xrightarrow[y = 2 - a^2]{x = a} 2 - a^2 = -a^2 + 2$ που ισχύει

άρα το A κινείται πάνω στην $y = -x^2 + 2$.

2. Από υπόθεση $f'(1) = 0 \overset{(*)}{\Longrightarrow} 2e^{1-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{1-a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$

3. i) $f(x) = 2e^{x-1} - x^2, \ x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 2e^{x-1} - 2x, \ f'(1) = 0$

$f''(x) = 2e^{x-1} - 2$

x		1	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$: $f'(x) \geq f'(1) = 0$

αφού η ρίζα διακεκριμένη - μοναδική για την $f'(x)$ $(x = 1)$

η f γν. αύξουσα.

-8-

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις

$M(x) = (x-2)\cdot k + 4(x-1)L(x)$

$M'(x) = k + 4L(x) + 4(x-1)\cdot L'(x)$ (*)

$L(x) = f(x-\ln x) - f(1/2)$, $x>0$

$L'(x) = f'(x-\ln x)\cdot(1-\frac{1}{x}) = f'(x-\ln x)\,\frac{x-1}{x}$

όμως $f'(x)>0$ για $x>1/2$ και αφού $x-\ln x \geq 1$

θα ισχύει $f'(x-\ln x)>0$

Έτσι $L'(x)>0$ στο $(1,2)$ $\quad$ ($k>0$ και $L(x)>0$)

οπότε $M'(x)>0$ στο $(1,2)$ και αφού η $M(x)$ συνεχής στο $[1,2]$,

ισχύει $M(x)$ ↗

οπότε η ρίζα $x_0\in(1,2)$ είναι μοναδική.

Παρατηρήσεις

***: (Θεμα 2ο το $f(A)$)

$f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$, $0 < x \neq 1$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1-x\ln x}{x}}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2}$

οπότε $f'(x) \leq 0$ με διακεκριμένη ρίζα άρα η $f \downarrow$.
(απο το 1. $\Rightarrow x-1 \leq x\ln x$)

$A_f = (0, +\infty) \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f \downarrow} f(A) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x-1} = +\infty$

Συνεπώς $\boxed{f(A) = (0, +\infty)}$

Εν Δυνάμει
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Παρατηρήσεις